Matemáticas II

- BACHILLERATO
- FORMACIÓN PROFESIONAL
- CICLOS FORMATIVOS DE GRADO SUPERIOR

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

UPV/EHU

2016

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO PROBAK	*PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD*
2016ko EKAINA	JUNIO 2016
MATEMATIKA II	*MATEMÁTICAS II*

Azterketa honek bi aukera ditu. Haietako bati erantzun behar diozu.
Ez ahaztu azterketako orrialde bakoitzean kodea jartzea.

- Azterketa 5 ariketaz osatuta dago.
- Ariketa bakoitza 0 eta 2 puntu artean baloratuko da
- Programagarriak ez diren kalkulagailuak erabil daitezke.

Este examen tiene dos opciones. Debes contestar a una de ellas.
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

- El examen consta de cinco ejercicios.
- Cada ejercicio será valorado entre 0 y 2 puntos.
- Se podrán utilizar calculadoras no programables.

OPCIÓN A

Ejercicio A1

Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro b (NO es necesario resolverlo en ningún caso).

$$
\begin{aligned}
x + 2y - z &= 2 \\
x + (1+b)y - bz &= 2b \\
x + by + (1+b)z &= 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio A2

Determinar el plano que pasa por el origen de coordenadas, es paralelo a la recta de ecuación

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

y también es paralelo a la recta que pasa por los puntos (0,1,1) y (1,1,0).

Ejercicio A3

Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

y calcula cuáles son sus máximos y sus mínimos.

Ejercicio A4

Dibujar el recinto encerrado entre las gráficas de las funciones

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ y $g(x) = -x + 3$,

y calcular el área de dicho recinto.

Ejercicio A5

La siguiente serie está compuesta por los siguientes múltiplos consecutivos de 5:

45, 50, 55,…, 650, 655

a) ¿Cuántos números componen la serie?
b) ¿Cuál es su suma?

OPCIÓN B

Ejercicio B1

Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ a-2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Encuentra los valores del parámetro a para que la matriz NO sea inversible.
b) En caso de existir, calcula la inversa de A para $a = 2$

Ejercicio B2
Dado el plano $x-3y+2z=7$:
a) Determinar el punto simétrico del $(3,\ -8,\ 4)$ respecto a dicho plano.
b) Calcular la distancia entre los dos puntos simétricos.

Ejercicio B3
Dada la función $f(x)=Ax^3+Bx^2+C$
a) Calcula los valores de los parámetros A, B y C de manera que la función satisfaga las siguientes propiedades:
- Pase por el punto (0,0).
- Tenga un máximo local en el punto (1,2).

b) Calcula todos los valores de la variable x en los que la gráfica de la función tiene tangente horizontal.

Ejercicio B4
Resolver la siguiente integral

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}\,dx\,.$$

Ejercicio B5
En un teatro hay tres tipos de localidades, que llamaremos A, B y C. Las del tipo A cuestan 24 euros, las del tipo B cuestan 20 euros y las del tipo C cuestan 15 euros. El teatro tiene una capacidad de 400 butacas de las cuales se han vendido el 80%. En total se han recaudado 5.940 euros. Sabiendo que se han vendido el doble de localidades del tipo B que del tipo A. ¿Cuántas localidades de cada tipo se han vendido?

MATEMÁTICAS II

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN.

1. El examen se valorará con una puntuación entre 0 y 10 puntos.
2. Todos los problemas tienen el mismo valor: hasta 2 puntos.
3. Se valorará el planteamiento correcto, tanto global como de cada una de las partes, si las hubiere.
4. No se tomarán en consideración errores numéricos, de cálculo, etc., siempre que no sean de tipo conceptual.
5. Las ideas, gráficos, presentaciones, esquemas, etc., que ayuden a visualizar mejor el problema y su solución se valorarán positivamente.
6. Se valorará la buena presentación del examen.

Criterios particulares para cada uno de los problemas

OPCIÓN A

Problema A.1 (2 puntos)

- Obtención de la matriz del sistema, cálculo de su determinante y obtención de los valores que lo anulan (1 punto)
- Discusión de cada caso .
  - El caso $b \neq 0$ (0, 4 puntos)
  - El caso $b = 0$ (0, 3 puntos)
  - El caso $b= 1$ (0, 3 puntos)

Problema A.2 (2 puntos)

- Obtención de la recta que pasa por los dos puntos (1 punto)
- Planteamiento del problema y obtención del plano de manera correcta (1 punto)

Problema A.3 (2 puntos)

- Obtención correcta de la derivada de la función (0, 5 puntos)
- Obtención de los puntos críticos y la discusión de la naturaleza de cada uno de ellos(1 punto)
- Estudio de los intervalos de crecimiento (0,5 puntos)

Problema A. 4 (2 puntos)

Para puntuar el problema se tendrán en cuenta:

- Dibujo de la parábola y la recta dada y obtención del recinto(1 punto)
- Cálculo del área del recinto aplicando la regla de Barrow(1punto)

Problema A.5 (2 puntos)

- Obtención de cuántos múltiplos consecutivos hay (0,5 puntos)
- Cálculo de la suma de los múltiplos, utilizando cualquier método (ensayo error, fórmula, etc) otro medio constructivo (1,5 puntos)

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

OPCIÓN B

Problema B.1 (2 puntos)
- Resolución del determinante de la matriz (0,5 puntos)
- Discusión para los dos casos (1 punto)
- Cálculo de la matriz inversa para $a = 2$ (0,5 puntos)

Problema B.2 (2 puntos)
- Planteamiento del problema y obtención del punto P´ (simétrico del P) respecto al plano. (1,25 puntos)
- Cálculo de la distancia entre los dos puntos simétricos (0,75 puntos)

Problema B.3 (2 puntos)
- Obtención de la derivada de la función (0,5 puntos)
- Obtención adecuada de los parámetros imponiendo las condiciones pertinentes (1,5 puntos)

Problema B. 4 (2 puntos)
- Si descompone adecuadamente la integral en fracciones simples (1 punto)
- Cálculo de las tres pequeñas integrales (1 punto)

Problema B.5 (2 puntos)
- Planteamiento del problema mediante un sistema de ecuaciones (1 punto)
- Resolución correcta del sistema (1 punto)

SOLUCIONES

Problema A.1.

El determinante del sistema es igual a $2b^2 - 2b$. Igualando a cero obtenemos los valores b= 0 y b =1. Por tanto

- para $b \neq 0, 1$ El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO
- Para b = 0 , el rango de la matriz es 2, mientras que el rango de matriz ampliada es 3, por tanto en este caso el sistema es INCOMPATIBLE
- Para b = 1, el rango de la matriz es 2, mientras que el rango de la matriz ampliada tambiés es 2(coinciden la primera y segunda fila), por tanto al ser el rango menor que el número de incógnitas (2<3), el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO y en este caso necesita un parámetro para poder resolverlo.

Problema A.2.

La primera recta tiene como vector director v(1,-1,1) y la segunda recta tiene como vector director w(-1,0,1). El plano tiene como vector normal el producto vectorial de los vectores anteriores. Por tanto $n = v \times w$ = (-1, -2-1) Por tanto la ecuación del plano pedido es : $x+2y+z = 0$

Problema A.3.

Es claro que la función no existe para los valores x = 2 y x = -2, y que además es una función impar que pasa por el origen de coordenadas. Para calcular los intervalos de crecimiento es necesario calcular la derivada de dicha función. Su derivada es :

$$y' = \frac{3x^2(x^2-4) - 2x(x^3)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$$

La derivada se anula para los valores $x = 0, x = 2\sqrt{3}, x = -2\sqrt{3}$

Los intervalos de crecimiento (y'es positiva) son:

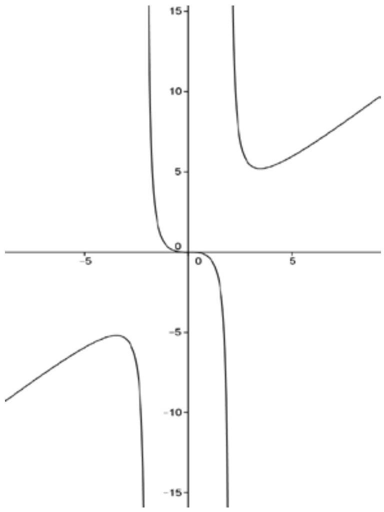
$$\left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$$

Los intervalos de decrecimiento (y'es negativa) son:

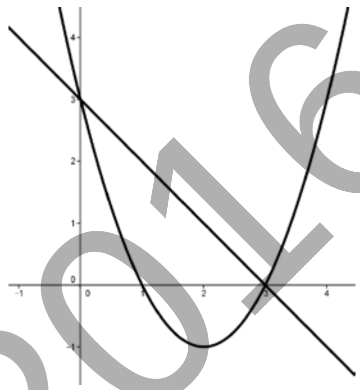
$$(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, +2) \cup (2, +2\sqrt{3})$$

- Se alcanza el máximo local para $x = -2\sqrt{3}$
- Se alcanza el mínimo local para $x = 2\sqrt{3}$
- El valor x = 0 , no es máximo ni mínimo.

La función tiene la siguiente gráfica:



Problema A.4.



Los puntos de corte de las dos gráficas son x = 0 y x = 3. El área pedida es

$$A=\int_0^3\left[(-x+3)-(x^2-4x+3)\right]dx=9/2=4.5$$

Problema A.5.

c) Si consideramos la serie completa de múltiplos de 5, comenzando desde el número 5, podemos escribir

$$1\times5,\ 2\times5,\ldots.8\times5,\ 9\times5,\ldots..131\times5,$$

que evidentemente tiene 131 múltiplos seguidos del 5.
La serie dada contiene a todos los números anteriores, excepto los 8 primeros, por tanto en total hay 131-8 = 123 números múltiplos de 5.

d) La suma pedida es:

$$S=\frac{(45+655)}{2}.123=43050$$

SOLUCIONES

Problema B.1.

c) Para que NO sea inversible se ha de cumplir que el determinante de su matriz sea igual a cero. Por tanto : $(a-1)(3a-2)=0$: Es decir la matriz no tiene inversa para los valores a = 1 , a = 2/3.

d) La matriz inversa para el caso a = 2 es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Problema B.2.

c) El vector $(1,\ -3,\ 2)$ es un vector normal al plano dado. Por tanto, podemos obtener la ecuación de la recta perpendicular al plano que pasa por el punto dado $(3,\ -8,\ 4)$. En paramétricas la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x = 3+t \\ y = -8-3t \\ z = 4+2t \end{cases}$$

Ahora imponemos la condición de intersección de la recta y el plano.

$$3+t+24+9t+8+4t=7 \ \Rightarrow\ 14t=-28 \ \Rightarrow\ t=-2 \ \Rightarrow .\ M\ (1,\ -2,\ 0)$$

Al ser M el punto medio del segmento que tiene por extremos el punto dado y su simétrico, esto nos permitirá calcular el simétrico de P, será $P'\ (-1,\ 4,\ -4)$

d) Para calcular la distancia entre los puntos simétricos podemos proceder de dos maneras, bien hallando la distancia entre dichos puntos o bien duplicando la distancia del punto inicial al plano. Su resultado es :

$$PP' = 2\sqrt{2^2+6^2+4^2} = 2\sqrt{56} = 4\sqrt{14}.$$

Problema B.3.

c) Imponiendo las condiciones, se obtiene C = 0 , mientras que A y B satisfacen el sistema:

$$\begin{matrix} 3A+2B=0 \\ A+B=2 \end{matrix}$$, por tanto A= - 4 y B = 6.

d) Si derivamos la función e igualamos a cero, obtenemos los puntos de tangente horizontal. Por tanto $y' = -12x^2+12x=0$, de donde x = 0 (mínimo) y x = 1 (máximo)

Problema B.4.

Descomponiendo en fracciones, tenemos:

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}$$

Por tanto

$$2x^2+5x-1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

Calculando los coeficientes tenemos. A = 1/2 , B = 2, C = -1/2

$$\int\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x)+2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\ln(x+2)+\mathrm{C}$$

Problema B.5.

Llamando x, y, z el número de localidades del tipo A, B y C respectivamente. Como el 80% de 400 = 320 localidades, podemos plantear el siguiente sistema:

$$x+y+z=320$$
$$2x=y$$
$$24x+20y+15z=5940$$

Resolviendo

x = 60 localidades del tipo A
y = 120 localidades del tipo B
z = 140 localidades del tipo C